



TITLE:

# 岸に沿う傾圧流上の成長する孤立モードについて(液体中の非線形波動の数理的側面)

AUTHOR(S):

久保川, 厚

---

CITATION:

久保川, 厚. 岸に沿う傾圧流上の成長する孤立モードについて(液体中の非線形波動の数理的側面). 数理解析研究所講究録 1991, 740: 281-290

ISSUE DATE:

1991-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102092>

RIGHT:

## 岸に沿う傾圧流上の成長する孤立モードについて

九大総理工 久保川 厚 (Atsushi Kubokawa)

### 1. はじめに

海洋の陸岸近くには幅数  $10 \sim 100 \text{ km}$ 、流速  $1 \sim 2 \text{ m/s}$  前後の海流が多数見られ（日本の周りでは、黒潮、津軽暖流、宗谷暖流など）、それらの海流の多くは波動状に波打っていたり、巨大な渦を伴ったりしている。また、黒潮は、岸に沿ってほぼまっすぐ流れる直進流路と大きく蛇行する大蛇行流路の2つをとるが、この直進流路から蛇行流路への遷移に際しては、九州近くに小さな蛇行が現れ、それが東進して大蛇行流路になることが知られている。これに関しては Yoon & Yasuda<sup>1)</sup> の数値実験があり、直進流路にある程度以上強い渦を重ねるとこの遷移が再現できることが示された。また、オーストラリア沿岸を流れるルーウィン海流上の不安定渦は、成長の後切離されることもあるが、再び振幅が減少して海流に飲み込まれてしまう場合もある (Griffiths & Pierce<sup>2)</sup>)。本研究の目的は、黒潮小蛇行に対応するような、岸に沿う線形安定な海

流上の有限振幅波の成長の可能性と、不安定波の非線形発展、特に振幅の振動の可能性を、単純なモデルで調べることにあ  
る。

## 2. モデル並びに基礎方程式

海流の不安定には順圧不安定と傾圧不安定がある。順圧不安定と言うのは水平シアにともなうシア不安定のことであるが、傾圧不安定と言うのは回転成層流体特有のものである。回転成層流体において流れに鉛直シアが存在する場合には、コリオリ力と圧力傾度力の釣り合（地衡流平衡）により、等密度面が傾くことになる。この傾きに伴う有効位置エネルギーの解放によって生じる不安定が傾圧不安定である。ここでは、図1のような2層流体における傾圧不安定のみを考える。また、密度の一樣な流体中では地衡流平衡のもとでは鉛直シアは存在せず (Taylor-Proudmanの定理)、鉛直シアは密度境界面に集中する。

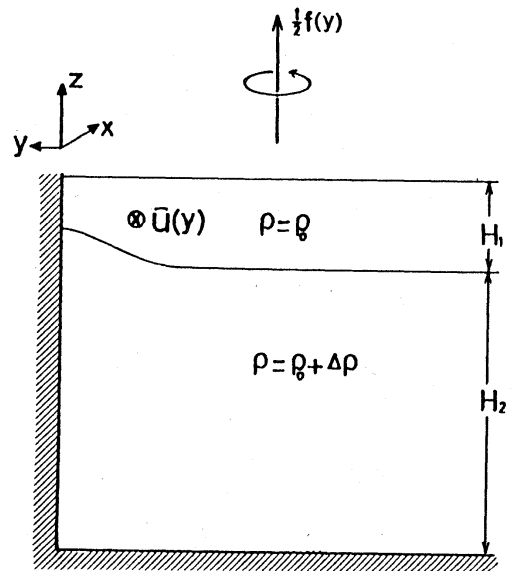


図1. モデル

基礎方程式としては、ほぼ地衡流平衡が成立している流体の水平運動を支配する適当に無次元化された準地衡流渦位方程式、

$$Q_j t + J(\psi_j, Q_j) = 0, \quad (2.1)$$

$$Q_j = \psi_{jxx} + \psi_{jyy} - (-\delta)^{j-1}(\psi_1 - \psi_2) / (1 + \delta) + \beta y,$$

を用いる。ここで、 $\delta$  は上層と下層の厚さの比の平均値 ( $H_1/H_2$ )、 $Q_j, \psi_j (j=1, 2)$  は上層下層それぞれの渦位と地衡流流線関数で、 $J$  はヤコビアン、 $J(A, B) = A_x B_y - A_y B_x$ 、添え字の  $x, y, t$  は微分を表す。なお、ここで  $\beta$  というのはコリオリパラメータ、 $f$ 、の緯度変化を表すが、以下ではその効果については触れない。また、流速の  $(x, y)$  成分  $(u_j, v_j)$  は  $(-\psi_{jy}, \psi_{jx})$  であり、 $\psi_1 - \psi_2$  が密度界面の変位に対応する。

### 3. $\delta \ll 1$ の場合：弱非線形モデル

岸に沿って、上層に  $\bar{u}(y)$  という流れがあり、下層は静止しているとする。岸での基本場の流速  $\bar{u}(0)$  と  $\beta$  が  $O(\delta)$ 、 $x$  方向のスケールを  $\delta^{-1/2}$ 、時間を  $\delta^{-3/2}$  であるとし、 $\psi_j$  を  $\delta$  で展開すると、上層下層それぞれに対して、

$$\phi_t + (c_0 + q\phi)\phi_x - r\phi_{xxx} - s \int_{-\infty}^0 \psi_x dy = 0, \quad (3.1)$$

$$(\phi_{yy} + \bar{u}_0 \phi)_T - (\bar{u}_0 - \beta) \psi_x = 0, \quad (3.2)$$

を得ることができる。ここで、 $\phi(X, T)$ は上層の変動の最低次で現れるモードの振幅関数、 $\psi(X, y, T)$ は下層の流線関数であり、 $\beta \rightarrow \delta \beta$ としてある。式の導出並びに係数については Kubokawa<sup>2)</sup>を参照頂きたい。

(3.1)式を線形化すると、波数  $k$  の波動解の位相速度は  $\gamma = c_0 + r k^2$  によって決まる。 $\beta = 0$  の場合の位相速度の  $\gamma$  依存性を図 2 に示す。図中、U-mode,  $L_n$ -mode ( $n=1, 2, \dots$ ) とあるのはそれぞれ上層と下層の渦位傾度を主な復原力とする波である。図より明らかなように、 $c_0 > \gamma_c$  の海流は線形擾乱に対して安定である。また、(3.1), (3.2) は孤立波解

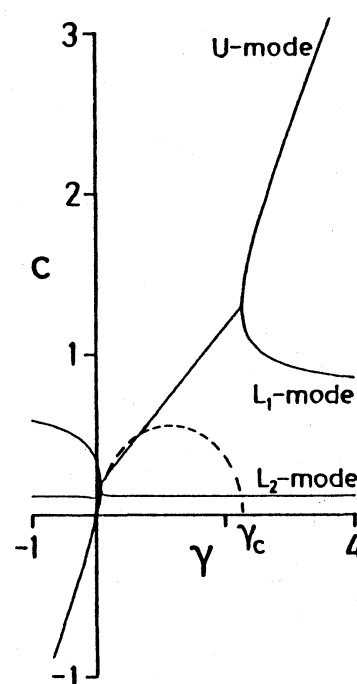


図 2. 伝播速度  $c$  の  $\gamma$  依存性。

実線と破線はそれぞれ実数部と虚数部を表す。

$$(\phi, \psi) = -(a, aA(y)) \operatorname{sech}^2 \{ (aq/12r)^{1/2} (X - cT) \}, \quad (3.3)$$

を持つが、その伝播速度も、また、 $\gamma = c_0 - qa/3$  と置く

と図2によって与えられる。この場合、海流が線形安定であっても、振幅  $a$  が、 $3(c_0 - \gamma_c)/q < a < 3c_0/q$  の場合には、U-modeの孤立波解は存在しない。クノイド波についても同様にある振幅領域には解が存在しない。

この定常解の存在しない領域にどのような解があるか見るために、 $\gamma = \gamma_c$  の周りで方程式を展開すると、 $c = c(\gamma_c)$  で動く座標系で

$$G\phi_{\tau\tau} - \mu\phi_{xx} - (q/2)\phi^2_{xx} + r\phi_{xxxx} = 0, \quad (3.4)$$

が得られる。ここで、 $G$  は定数で、 $\mu$  は  $c_0 - \gamma_c$ 。この式は拡張されたブジネスク方程式と呼ばれ<sup>4)</sup>、臨界振幅  $a_c = 3\mu/q$  を越える  $\text{sech}^2$  型の初期値の時間発展を示す解を、2-ソリトン解として得ることができる。その解は時間とともに成長し、有限時間内に発散する。すなわち、海流が線形安定な場合にも、有限振幅波は、伝播速度に対する振幅の効果故に、 $\phi$  と  $\psi$  の共鳴が起き、不安定化しうることが判る。

有限時間内での発散は、 $\gamma = \gamma_c$  の周りで展開が破綻することを意味するが、それ以後の発展に関しては、(3.1), (3.2) に戻らねばならない。その場合には、第2の臨界振幅、 $a_c' = 3c_0/q$ 、が存在し、これよりも大きな振幅のU-modeは存在しえる。実際に数値的に時間発展を追うと(図3)、この

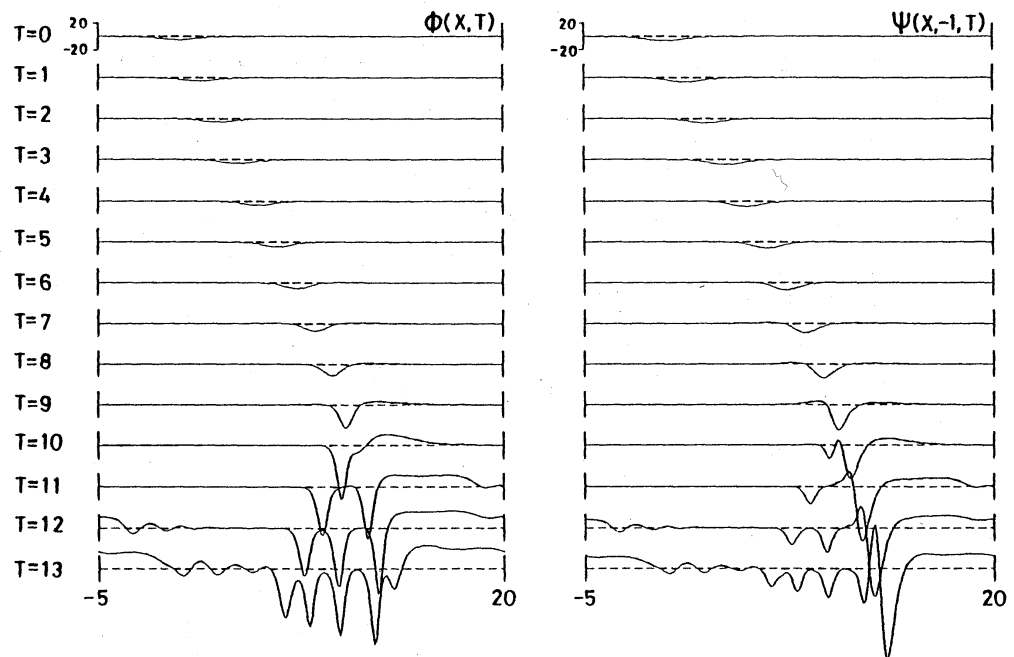


図 3. 弱非線形モデルにおける線形安定な海流上の有限振幅  
擾乱の非線形発展 ( $a > a_c$ ,  $\beta = 0$ ).

振幅を越えた後、 $\phi$ と $\psi$ の結合が解け、 $\phi$ の変位はU-modeの孤立波として上流に伝播し始めるのが判る。他方、 $\psi$ の変位は新たに $\phi$ の変位を励起し、それと結合して $\phi$ の振幅が $a_c$ を越えるまで成長し、その後は孤立波の放出と、成長を繰り返す。この第2の臨界振幅は、線形不安定な場合にも存在するが、この場合、解が周期的なので、 $\phi$ と $\psi$ の結合が解け、 $\phi$ の変位が上流伝播になるということは、 $\phi$ と $\psi$ の変位の位相関係が、変わることを意味する。不安定波は $\phi$ と $\psi$ の位相がずれた形で振幅が $a_c$ を越えるまで成長するが、越えた後は、 $\phi$ と $\psi$ の位相関係が不安定波の複素共役である減衰波の解と同じになり、減衰し始める。そして、十分に減衰すると

再び不安定波が成長を始め、振幅の振動が続くことになる<sup>6)</sup>。

#### 4. $\delta = O(1)$ の場合

上の結果は、伝播速度に及ぼす非線形性の効果が、流れの有限振幅擾乱に対する安定性やその非線形発展に本質的な役割を果たす可能性を示している。しかし、現実には $\delta$ はそう小さくはなく、弱非線形の仮定は破綻する。また、振幅がそう大きくない場合に関しても、上の議論がそのまま適用できるという保証はない。そこで、 $\delta$ を $O(1)$ として、同様の問題を考える。ただし、この場合、(2.1), (2.2)を直接解くことになるので、流速プロファイルの与え方などによっても定性的な結果が変わりうる。そこで、最も単純なシステムとして、上層下層それぞれ、渦位の一様な2つの領域から構成される場を考える。このシステムは、これら2本の渦位前線(渦位の不連続線)それぞれの変動を記述する2連立微分積分方程式に帰着される(コンタ・ダイナミックス方程式<sup>6), 7), 8)</sup>。

ここでは、もちろん傾圧不安定が可能なように渦位分布を与えるが、この不安定はこれら2本の渦位前線の共鳴として表される。

長波の安定性に関しては、横軸に岸での平均流の傾圧流速をとり、縦軸に位相速度をとると、図2と同様の図が描け、



先ほどと同様、岸での流速がある程度大きいと線形安定となることが判る。そして、この臨界傾圧流速の周りで、微小有限振幅、長波の仮定のもとに、方程式を展開すると

$$\phi_{\tau\tau} - \mu \phi_{xx} - (q/2) \phi^2_{xx} + r H \phi_{xxx} = 0, \quad (4.1)$$

を得る。ここで  $H$  はヒルベルト変換演算子である。(3.4)式と違って分散項が Benjamin-Ono 型になっているが、これは、 $\delta$  が小さくないので順圧成分が重要となり、かつ、半無限  $f$  平面である（渦位分布が陸近くにしか存在しない）ことによる。この式は代数ソリトンの解

$$\phi = -a / \{ (qa/4r)(X - cT) + 1 \},$$

を持つが、この場合も臨界振幅  $a_c = 4\mu / q$  を越える解は存在しない。(4.1)式を数値的に解くことによって、この臨界振幅を越える初期値が(3.4)式の場合と同様に爆発的に成長するということは容易に確かめることが出来る。

この解のさらなる発展はコンタ・ダイナミックス方程式を数値的に解くことによって、追うことが出来る(図4)。この場合も、上層下層の変動が結合した形で成長し、そして、ある程度成長すると上層の擾乱は上流伝播となり、下層の渦がそれを追い越す。この追い越す時に上層の擾乱は前方碎波

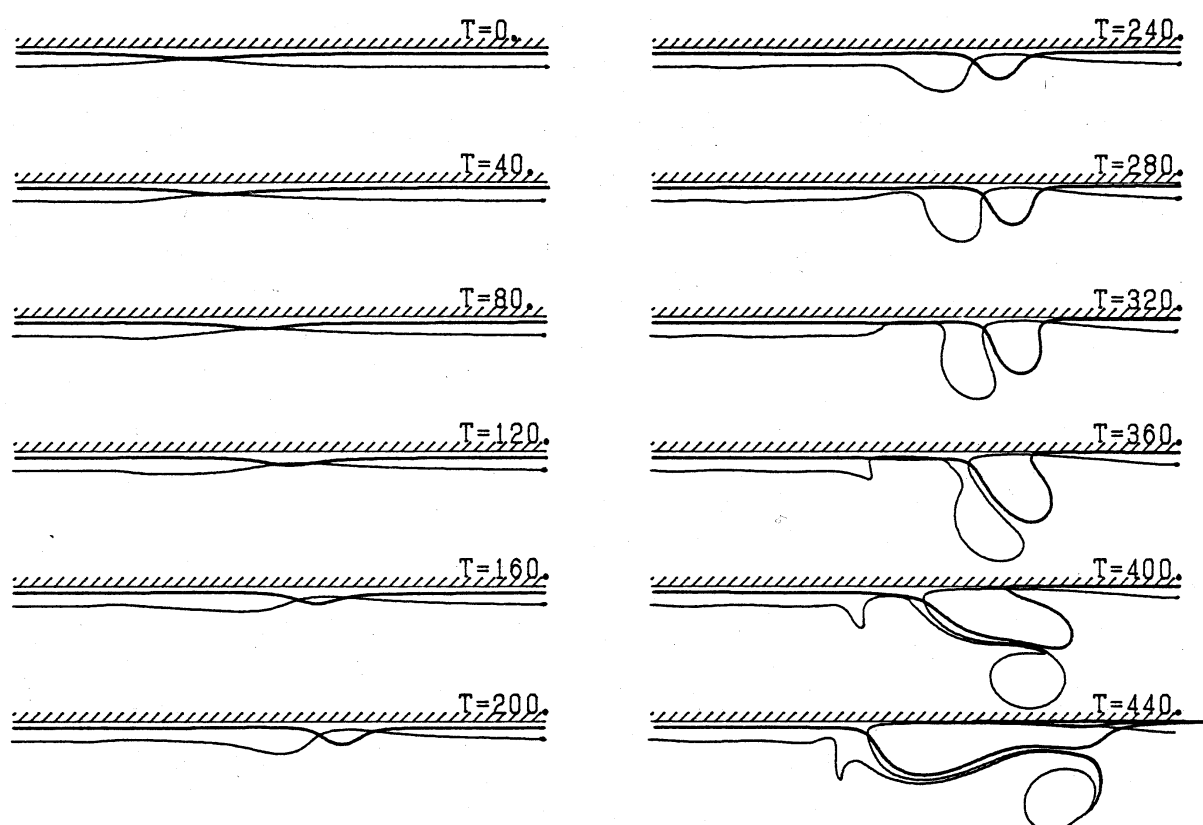


図 4. コンタ・ダイナミックスモデルにおける孤立擾乱の非線形発展 ( $\delta = 0.25$ ). ハッチを付けた部分が陸、太い実線と細い実線それぞれが上層と下層の渦位前線を表す。

を起こしているが、その後は 2 瘤になり、（図 4 には示していないが）その上流の部分は大幅の孤立した波として上流へ進み、下流部分は下層の渦と結合して成長を始めるという、定性的には弱非線形論と似た発展を示す。他方、線形不安定波の発展は波長や上層下層の渦位前線の位置関係によって違ってくるが、適当な（比較的現実的な）条件下において、振幅の振動も見られる。ただし、この場合には先に述べた弱非線形論とは違って振幅の増大にともなう下層の擾乱の伝播速

度の減少（もしくは上層の擾乱の伝播速度の増大）によって、上層下層の位相の変化がもたらされる。このことは、波の伝播速度に対する振幅の影響が波長によって異なることを示唆する。これについては現在調べている最中である。

#### 引用文献

- 1) Yoon, J.H. and I. Yasuda, 1987: J. Phys. Oceanogr. 17, 66-81.
- 2) Griffiths, R.W. and A.F. Pearce, 1985: Deep-Sea Res. 32, 1511-1434.
- 3) Kubokawa, A., 1989: J. Phys. Oceanogr. 19, 183-192.
- 4) 矢嶋信男, 1986: 乱流現象の科学, 巽友正編, 東京大学出版会, 47-82.
- 5) Kubokawa, A., 1988: Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 40, 195-223.
- 6) Zabusky, N.J., M. Hughes and K.V. Roberts, 1979: J. Comp. Phys. 30, 96-106.
- 7) Pratt, L.J. and M.E. Stern, 1986: J. Phys. Oceanogr. 16, 1101-1120.
- 8) Helfrich, K.R. and U. Send, 1988: J. Fluid Mech. 197, 331-348.